Handout der Übungsstunde vom 06.03.2019

Bibiana Prinoth
bprinoth@phys.ethz.ch
`https://blogs.ethz.ch/funwithphysics/`

Laminare Strömungen

Bisher haben wir nur laminare Strömungen ohne Reibung betrachtet. Laminar heisst, dass wir weder Wirbel noch Turbulenzen in unseren Fluida haben. Nun betrachten wir den Fall mit Reibung.

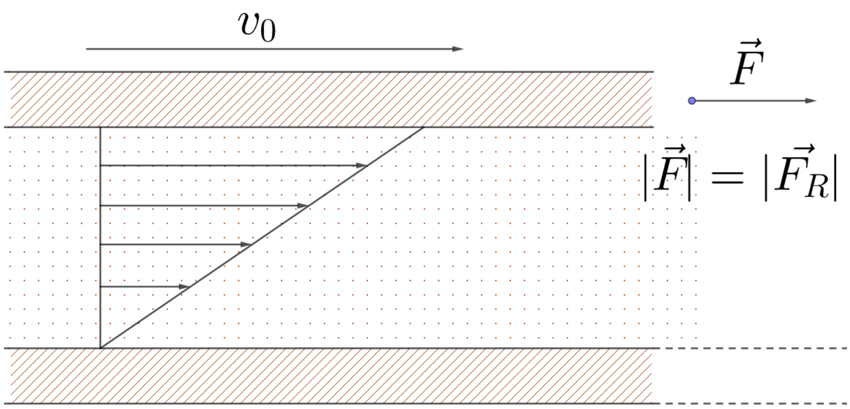

Abbildung 1: Laminare Strömung mit innerer Reibung. Von der unteren zur oberen Platte wächst die Geschwindigkeit v der einzelnen Schichten.

Wir treffen folgende Annahmen:

- Das Fluid hafte an der unteren und an der oberen Platte und bewege sich an der Grenzfläche mit den Geschwindigkeiten der jeweiligen Platten.
- Das Geschwindigkeitsgefälle im Fluid sei linear.

Unter diesen Bedingungen lautet das (Newton'sche) Reibungsgesetz[1]:

$$F_R = \eta \, A \, \frac{v_0}{d} \tag{1}$$

Bei Verallgemeinerung auf nicht-lineare Geschwindigkeitsgefälle beträgt die lokale Reibungskraft:

$$F_R = \eta \, A \, \frac{dv(x)}{dx} \tag{2}$$

[1] siehe Trautwein 5.3.3.2

Beispiel: Hagen-Poiseuille

Wir betrachten nun als Beispiel die Strömung eines Fluidums durch ein Rohr. Dabei ist das Rohr in Ruhe. Das Fluidum bewegt sich durch das Rohr und bleibt dabei jeweils am Berührungspunkt mit der Rohrwand haften. Das Geschwindigkeitsprofil sieht wie folgt aus:

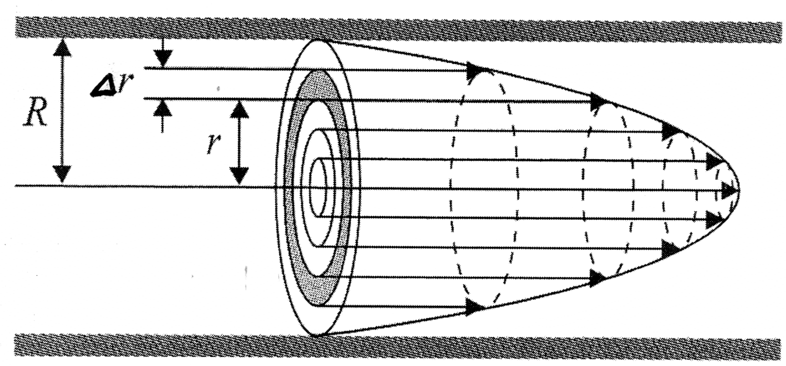

Abbildung 2: Darstellung zur Herleitung des Gesetzes von Hagen-Poiseuille.

Das Ziel ist es nun das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit des Radius' zu bestimmen. Es wirken hier zwei Kräfte: **Reibung** und **Kraft durch das Druckgefälle**. Für die zweitere bekommen wir in Abhängigkeit des Radius den folgenden Ausdruck:

$$F_{\text{axial}} = 2\pi r \Delta r (p_1 - p_2) \tag{3}$$

Dabei ist der Ausdruck $2\pi r \Delta r$ jeweils die Oberfläche einer Schale (siehe Bild) und $p_1 - p_2$ das Druckgefälle, wobei p_1 links und p_2 rechts herrscht.

Im stationären Fall, wie wir ihn betrachten, herrscht ein Gleichgewicht zwischen der Reibungskraft und F_{axial}. Mit der Anfangsbedingung $v(r = R) = 0$ erhalten wir das folgende Geschwindigkeitsprofil:

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\,\eta\,l}(R^2 - r^2) \tag{4}$$

Recap: Bewegungsgleichung

Auf euren Wunsch hin, findet ihr hier noch einen Recap zu Bewegungsgleichungen. Wir betrachten dabei eigentlich zwei verschiedene Szenarien:

1. **Kinematik:** Wir kennen die Beschleunigung und können demnach die Ortsfunktion direkt berechnen. Wir stellen demnach keine Differentialgleichung für die Bewegung auf, sondern lösen das Problem direkt durch die Beschleunigung.

2. **Dynamik:** Wir kennen nur die Kräfte, welche auf den zu betrachtenden Körper wirken. Aus dem zweiten Newton'schen Gesetz ($F = ma$ resp. dem Analogon für Drehbewegungen $M = I\alpha$ können wir direkt die Differentialgleichungen herleiten. Diese können wir dann lösen, um auf die gewünschte Ortsfunktion zu kommen.

Im Folgenden findet ihr den Auszug aus dem Recap zu diesem Thema. Die Beispiele, welche wir durchgerechnet haben, werden laufend ergänzt.

1 Kinematik des Massenpunktes

Die Kinematik behandelt die Bewegung eines Körpers (resp. Massenpunktes) im Raum. Es wird dabei nur auf die Art der Bewegung (wie?) geantwortet, nicht aber auf den Grund (warum?) eingegangen.

1.1 Definitionen und Begriffe

Definition: Ort Der Ort $\vec{x}(t)$ gibt die Position des Massenpunktes in Abhängigkeit der Zeit an. Die Wahl eines geeigneten Koordinatensystem ist daher besonders wichtig.

Definition: Geschwindigkeit Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ ist die zeitliche Ableitung des Ortes. Dabei ist $\vec{v}(t)$ die Momentangeschwindigkeit.

Definition: Beschleunigung Die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$ ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit.

1.2 Lineare Bewegungen

Wir kennen zwei unterschiedliche Arten von linearen Bewegungen, welche wir bereits in der Stunde einander gegenüber gestellt haben. Zum einen kennen wir die gleichförmig, gradlinige Bewegung, welche als Merkmal eine konstante Geschwindigkeit aufweist. Zum andern kennen wir die gleichmässig beschleunigte Bewegung, welche als Merkmal eine konstante Beschleunigung aufweist.

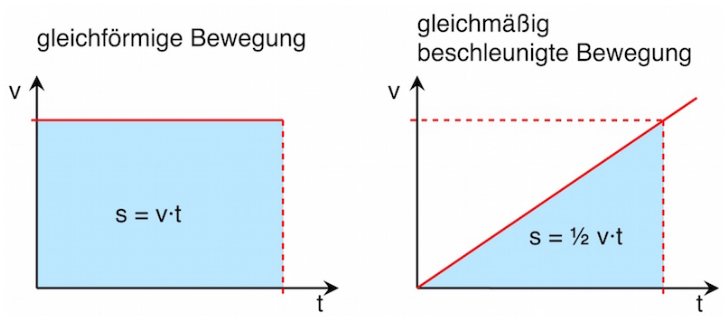

Abbildung 3: Gegenüberstellung der v-t-Diagramme für die gleichförmig gradlinige und die gleichmässig beschleunigte Bewegung [1]

gleichförmig, gradlinig	**gleichmässig beschleunigt**
Diese Bewegung hat die wundervolle Eigenschaft, dass die Geschwindigkeit konstant ist. Das heisst konkret: $$v = konst \rightarrow a = \frac{dv(t)}{dt} = 0 \quad (5)$$ Damit gibt sich für den zurückgelegten Weg bei dieser Bewegung: $$x(t) == v \int_{t_0}^{t} dt = v(t - t_0) \quad (6)$$	Für diese Bewegung ist die Geschwindigkeit nicht konstant. Daher gilt für die Beschleunigung: $$a = \frac{dv(t)}{dt} \neq 0 \quad (7)$$ Für eine gleichmässig beschleunigte Bewegung hat die Geschwindigkeit die allgemeine Form: $$v(t) = v_0 + at \quad (8)$$ Für die zurückgelegte Strecke gilt daher: $$x(t) = v \int_{t_0}^{t} dt = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (9)$$

Diese Bewegungen lassen sich natürlich auch mischen. Man betrachte dazu Serie 4, Aufgabe 1. Um eine solche Aufgabe zu lösen genügt es, die Abschnitte verschiedener Bewegungen zu unterteilen und die dabei entstehenden Teilstreckenlängen zu addieren.

1.3 Gegenüberstellung lineare Bewegungen und Kreisbewegung

Zusätzlich zu den linearen Bewegungen haben wir auch Kreisbewegungen behandelt, welche eine weitere Möglichkeit bieten, die Bewegung eines Massenpunkt zu beschreiben. Dafür wechseln wir in ein passenderes Koordinatensystem (Polarkoordinaten).

Koordinatenwechsel von kartesischen zu Polarkoordinaten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rcos(\varphi(t)) \\ rsin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Die Null in der z-Komponente des Ortes bedeutet für uns, dass wir eigentlich ein zweidimensionales Problem betrachten.

Die folgende Tabelle zeigt eine Gegenüberstellung der linearen Bewegungen und der Kreisbewegung. Sie fokussiert nur auf die Kinematik, nicht aber auf die Dynamik. Das folgt dann im nächsten Kapitel. Die gemeinsame Grösse der beiden Bewegungen ist die Zeit t mit der Einheit s.

Lineare Bewegungen	**Kreisbewegung**
keine Entsprechung	Radius $\vec{r}$ mit $[\vec{r}] = m$, Abstand zum Kreismittelpunkt
zurückgelegter Weg $\vec{s}$ mit $[\vec{s}] = m$	überstrichener Winkel φ mit $[\varphi] = rad$
Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ mit $[\vec{v}] = m/s$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ mit $[\vec{\omega}] = rad/s$
Beschleunigung $\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ mit $[\vec{a}] = m/s^2$	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ mit $[\vec{\alpha}] = rad/s^2$
keine Entsprechung	Umlaufzeit T mit $[T] = s$ und Frequenz $f = \frac{1}{T}$ mit $[f] = 1/s = Hz$

1.4 Anwendungsbereiche

Die Kinematik des Massenpunktes gibt uns die Möglichkeit, vereinfacht Bewegungen von Körpern zu beschreiben. Dabei ist uns wie oben erwähnt egal, weshalb der Körper sich bewegt. Wichtig ist es immer, dass man sich zu Beginn der Aufgabe ein Koordinatensystem wählt, mit welchem man dann die ganze Aufgabe hindurch konsistent arbeitet.

2 Dynamik des Massenpunktes

In vielen Aufgaben sind uns wichtige Werte für die kinematischen Aufgaben nicht gegeben, weshalb hier nun die Dynamik des Massenpunktes einspringen muss. Wir kennen oftmals nur die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte, woraus wir nun seine Bewegung konstruieren müssen. Um dies zu tun, betrachten wir die Newton'schen Axiome. Dabei ist es wichtig, die Definition des Impulses eines Massenpunktes zu kennen:

Definition: Impuls eines Massenpunktes

$$\vec{p}(t) = m\vec{v} = m\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \tag{11}$$

Mit dieser Definition können wir nun auf die Newton'schen Axiome eingehen.

2.1 Newton'sche Axiome

2.1.1 1. Axiom

Das erste Axiom beschreibt das Verhalten eines Körpers, wenn keine Kraft auf ihn wirkt.

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmig gradlinigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn einwirkt.

2.1.2 2. Axiom

Das zweite Axiom beschreibt die Änderung des Impulses eines Massenpunktes, wenn auf ihn eine Kraft einwirkt.

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \tag{12}$$

Wobei zu bemerken ist, dass die Kraft $\vec{F}$ vom Ort, der Geschwindigkeit und der Zeit abhängt / abhängen kann.
Mit der Definition des Impulses bei zeitlich konstanter Masse (!) können wir nun den Ausdruck für die Bewegungsgleichungen herleiten. Einsetzen in das zweite Axiom liefert:

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \tag{13}$$

Mit Hilfe dieses Ausdruckes können wir also nun die Bewegung eines Massenpunktes mit den auf ihn wirkenden Kräften in Verbindung setzen. Diese Gleichung ist enorm wichtig und wird in verschiedenster Weise immer wieder verwendet.

2.1.3 3. Axiom

Es handelt sich dabei um ein Gesetz über die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern. Jede Aktion (Kraft von Körper A auf B) erzeugt gleichzeitig eine gleich große Reaktion (Gegenkraft von Körper B auf A), die auf den Verursacher der Aktion zurückwirkt:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \tag{14}$$

2.2 Wichtige Kräfte

Hier sollen nun einige wichtige Kräfte genannt werden. Diese Liste ist nicht abschliessend.

- **Gravitationskraft nahe der Erdoberfläche (Gewichtskraft) $\vec{F}_g$:**

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \tag{15}$$

  wobei $\vec{g}$ die Erdbeschleunigung bezeichnet und meist ein negatives Vorzeichen besitzt (Koordinatenwahl!).

- **Gravitationskraft allgemein $\vec{F}_G$:**

$$\vec{F}_G = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r \tag{16}$$

  wobei G die Gravitationskonstante, M die Masse der Erde (oder des grossen Himmelskörpers), m die Masse des Massenpunktes (zB. des Satelliten) und $\vec{e}_r$ der Einheitsvektor in radiale Richtung ist.

- **Normalkraft $\vec{F}_N$:**
  Kraft, die die senkrecht auf eine Oberfläche wirkt. Sie wird meist über Winkelbeziehungen bestimmt. Wie immer ist die Wahl des Koordinatensystems hier enorm wichtig.

- **Reibungskraft $\vec{F}_R = \mu\vec{F}_N$:** Die Reibungskraft hängt ausschliesslich von der Normalkraft ab. Es gibt verschiedene Arten von Reibung (Roll-, Haft- oder Gleitreibung), welche alle verschiedene Reibungskoeffizienten μ ausweisen.

- **Federkraft:**

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x} \tag{17}$$

  wobei k die Federkonstante ist und $\Delta\vec{x}$ den Auslenkungsvektor beschreibt.

- **Luftwiderstand $\vec{F_W}$:**

$$\vec{F}_W = -\frac{1}{2}c_W A\rho v^2\vec{e}_v \tag{18}$$

  Hier sind c_W ein dimensionsloser Widerstandswert, A die Querschnittsoberfläche des Objekts, ρ die Dichte des Fluids (meistens Luft ;)) und die Geschwindigkeit des Körpers. Der Vektor $\vec{e}_v$ zeigt in die Richtung der Geschwindigkeit.

2.3 Anwendungsbereiche

Es gibt einige enorm wichtige Anwendungsbeispiele für die Arbeit mit den Newton'schen Axiomen. In jedem Fall, in dem Kräfte wirken und wir dadurch gerne die Bewegungsgleichung eines Körpers bestimmen möchten, benötigen wir das dritte Newton'sche Axiom. Konkrete Beispiele zur Anwendung: freier Fall, schiefe Ebene, Satellitenlaufbahn um die Erde, Federn (egal ob senkrecht oder waagrecht), etc.

2.4 Beschleunigte Bezugssysteme

Auf beschleunigte Bezugssysteme wirken noch andere Kräfte, die man sich nicht so einfach vorstellen kann. Dies sind die Scheinkräfte.
Scheinkräfte sind Kräfte zusätzlich wirken. Wichtig ist hier vor allem die Gleichung, welche die Bewegung einer Masse im beschleunigten System beschreibt:

$$m\ddot{\vec{x}}' = \vec{F} + \vec{F}_{Trägheit+\vec{F}_{Coriolis}+\vec{F}_{Zentripetal}=m\vec{a}-m\vec{A}-2m(\omega\times\dot{\vec{x}}'-m\omega\times(\omega\times\vec{x}')} \tag{19}$$

Dabei ist $\vec{A}$ die Beschleunigung des Ursprungs, ω die konstante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher das beschleunigte Bezugssystem rotiert und $\vec{F}$ die totale Kraft, welche in einem Inertialsystem auf einen Massenpunkt wirkt.
Scheinkräfte sind oftmals sehr schwer vorstellbar. Deswegen ist es am besten, wenn man einfach ein paar Aufgaben dazu durchrechnet.

Literatur

[1] *Physik-Unterricht online*, [Online], 19. März 2019, `https://physikunterricht-online.de/jahrgang-10/gleichmaessig-beschleunigte-bewegungen/`