Handout der Übungsstunde vom 13.03.2019

Bibiana Prinoth
bprinoth@phys.ethz.ch
https://blogs.ethz.ch/funwithphysics/

Nachbesprechung Serie 1

Aufgabe 1

Leider werden in der Musterlösung keine Begründungen für die Antworten gegeben. Ich werde hier noch meine Gedanken ergänzen.

Aufgabe 2

Der Begriff der **Rückstellkraft** hat euch hier einige Probleme bereitet. Was ist denn nun eine Rückstellkraft? Ihr könnt euch sicherlich noch an das Beispiel der **Hangabtriebskraft** erinnern. Im eigentlichen Sinne ist dies nur eine Bezeichung, welche wir zum besseren Verständnis eingeführt haben. Bei der Hangabtriebskraft war es die Gewichtskraftskomponente in Hangrunter-Richtung, welche diesen Namen erhalten hat. Für Rückstellkräfte kommen uns als erstes Federkräfte in den Sinn. Dehnen wir eine Feder, so will diese sich wieder zusammenziehen. Das heisst, sie möchte den Körper wieder an den Ort **zurück stellen**. Daher nennen wir Federkräfte auch Rückstellkräfte. Es gibt aber auch andere Kräfte, die diese Rolle übernehmen können. Ein Beispiel dafür ist in dieser Aufgabe gegegeben: die Gewichtskraft in einer Wassersäule kann auch als Rückstellkraft fungieren.

(a)

Die Rückstellkraft ist demnach hier gegeben durch:

$$F_{\text{Rueck}} = -mg = -2hA\rho g \tag{1}$$

Die Masse bekommen wir hier aus der Beziehung $m = \rho V$.

(b)

Wir können nun also die Bewegungsgleichung dazu aufstellen. Dazu benutzen wir das zweite Newton'sche Axiom (siehe Recap Bewegungsgleichungen). Es folgt demnach:

$$m\ddot{x} = -2xA\rho g \tag{2}$$

Wichtig ist hier anzumerken, dass wir ein anderes m betrachten als oben. Unser m ist hier die Masse der gesamten Wassersäule und nicht nur des Teils, der als Rückstellung fungiert. Wir kommen somit auf die folgende Gleichung:

$$\ddot{x} + \frac{2A\rho g}{m}x = 0 \tag{3}$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um einen harmonischen Oszillator. Im allgemeinen Fall lautet diese nämlich:

$$\ddot{x} + kx = 0 \tag{4}$$

Wobei $k = \omega^2$. Diese Gleichung lösen wir mit dem allgemeinen Lösungsansatz für den harmonischen Oszillator:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{5}$$

In unserem Fall ist $\omega = \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}}$. Die Konstanten A und B lassen sich durch gegebene Anfangsbedingungen bestimmen.

Aufgabe 3

Hinter der Bernoulli-Gleichung verbirgt sich eine etwas längere Herleitung, als man vorerst annehmen würde. Daher ist es völlig normal, dass sie euch noch etwas verwirrt. Jedoch möchte ich euch hier nochmals aufzeigen, welche Punkte wir genau betrachten:

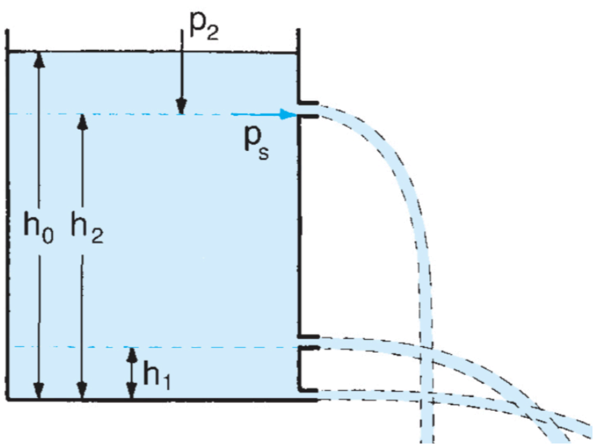

Abbildung 1: Bernoulli-Gleichung

Oder wo wie wir es betrachtet haben:

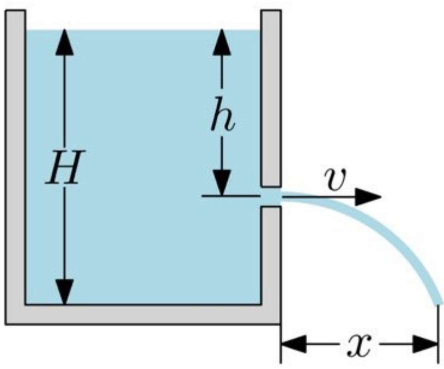

Abbildung 2: Aus der Serie: Anwendung der Bernoulli-Gleichung

Wir setzen nun den Nullpunkt auf die Höhe des Austrittslochs. Die z-Richtung soll nach oben zeigen. Wichtig ist nun der Druck p_2 wie er in der ersten Skizze gezeichnet ist. Dies ist der Druck, der unmittelbar vor dem Ausfliessen des Fluidiums auf es wirkt. Er ist gegeben durch:

$$p_{\text{Luft}} + mgh \tag{6}$$

Der Druck ist der einzige Beitrag zur Bernoulli-Gleichung ($p + \frac{1}{2}\rho v^2 = const.$), zumal das Fluidum an diesem Punkt so gesehen keine Geschwindigkeit besitzt. Man kann es sich so vorstellen, als würde man das Loch noch verschlossen halten und sich überlegen, was vor dem Öffnen des Lochs herrscht. Betrachten wir nun das Fluidum ganz kurz nach dem Passieren des Lochs (oder Öffnen). Für den Beitrag zur Bernoulli-Gleichung an diesem Punkt bekommen wir:

$$p_{\text{Luft}} + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{7}$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke gleich, so bekommt man $v = \sqrt{2hg}$. Für den Rest der Aufgabe betrachtet man dann einfach den freien Fall (aufteilen der Komponenten!). Des Weiteren kann man dann aufgrund von Symmetrie die Teilaufgabe (b) lösen und mithilfe der Maximierung (Ableiten und gleich null setzen) auch den Teil (c).

Aufgabe 4

Hier hattet ihr vor allem Probleme mit dem Aufgabenteil (b). Dazu hier eine Skizze:

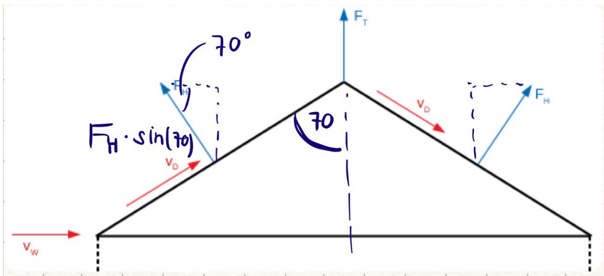

Abbildung 3: Wind über's Dach

Wichtig ist, dass ihr bei dieser Aufgabe die Dachneigung betrachtet. Den Druckunterschied bekommt ihr aus:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = const. = p_0 \tag{8}$$

Das heisst ihr nehmt an, dass der Druck unterhalb einfach der Umgebungsdruck p_0 ist. Der Druckunterschied ist damit gegeben durch:

$$\Delta p = p_0 - p = \frac{1}{2}\rho_L v_D^2 \tag{9}$$

Damit könnt ihr dann den Druck je Dachhälfte berechnen durch:

$$F_H = \frac{1}{2}\Delta p A \tag{10}$$

Die jeweils horizontalen Komponenten heben sich auf. Die vertikalen Summieren sich auf. Wir erhalten für die gesamte Kraft:

$$F_T = 2F_H \sin(70^\circ) \tag{11}$$

Aufgabe 5

Auch hier hat der Aufgabenteil (b) zu Verwirrung geführt. Wir benutzen hier sowohl die Kontinuitätsgleichung, als auch die Bernoulli-Gleichung.
Aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$v_1 A = v_2 a \longrightarrow v_2^2 = v_1^2 \frac{A^2}{a^2} \tag{12}$$

Aus der Bernoulli-Gleichung folgt:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_F v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_F v_2^2 \tag{13}$$

Wir können nun den Druckunterschied auch mithilfe der Höhe ausdrücken. Es gilt:

$$\Delta p = \rho_M g h \tag{14}$$

Setzen wir nun die Kontinuitätsgleichung in die Bernoulli-Gleichung ein, lösen nach $\Delta p = p_1 - p_2$ auf und setzen es gleich dem Druckunterschied in Gleichung (14), so erhalten wir für v_1:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\rho_M g h}{\rho_F(\frac{A^2}{a^2} - 1)}} \tag{15}$$

Neue Theorie: Thermodynamik

Ideale Gasgleichung

Im Rahmen eures Kurses betrachtet ihr *ideale Gase*. Ideale Gase sind eine Vereinfachung realer Gase, die annehmen, dass die Bewegung der einzelnen Atome wichtiger ist, als die Bindung. Das heisst, die kinetische Energie ist "wichtiger" als die Bindungsenergie. Des Weiteren gehen wir bei idealen Gasen von elastischen Stössen der einzelnen Atome / Moleküle aus. Es gilt demnach die Energieerhaltung. Für ideale Gase kennen wir die folgende Zustandsgleichung:

$$pV = NkT = nRT \tag{16}$$

Dabei sind die einzelnen Komponenten wie folgt gegeben:

- **Druck p:** Druck, der auf das Gas wirkt
- **Volumen V:** Volumen des Gases
- **Anzahl Moleküle N**
- **Boltzmann-Konstante k:** Die Boltzmann-Konstantante ist

$$k = 1.38064852 \cdot 10^-23 \frac{m^2 kg}{s^2 K}$$

- **Temperatur T:** Temperatur des Gases
- **Anzahl Mol n:** Es gilt der folgende Zusammenhang:

$$N = n \cdot N_A$$

  wobei N_A die Avogadro-Konstante ($N_A = 6.02214086 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$) ist.

- **Universelle Gaskonstante R:** Die universelle Gaskonstante ist

$$R = 8.314 \frac{kgm^2}{s^2 \cdot mol \cdot K}$$

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Für die Aufgaben braucht ihr noch den ersten Hauptsatz der Thermodynamik. Er lautet wie folgt:

Besitzt ein System eine gewisse Energie (wir nennen dies ***innere Energie*** *U), so kann diese konsequenterweise nur geändert werden ($\Delta U \neq 0$), wenn am System Arbeit geleistet wird (ΔW), oder wenn dem System Wärme zu(ab)geführt wird (ΔQ).*

Es gilt also:

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q \tag{17}$$

ΔW und ΔQ sind positiv, wenn dem System Energie zugeführt wird. Die innere Energie U hängt nur von Zustandsgrössen ab, wie z.B. Druck p, Volumen V und Temperatur T, und ist damit selbst eine Zustandsgrösse; d.h. sie ist unabhängig von der Vorgeschichte des Systems.

Wärmeübertrag

Falls $\Delta W = 0$ gilt:

$$\Delta Q = m\,c\,\Delta T = n\,C\,\Delta T \tag{18}$$

Dabei ist c die spezifische und C die molare Wärmekapazität mit Einheiten $[c] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$ resp. $[C] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$.