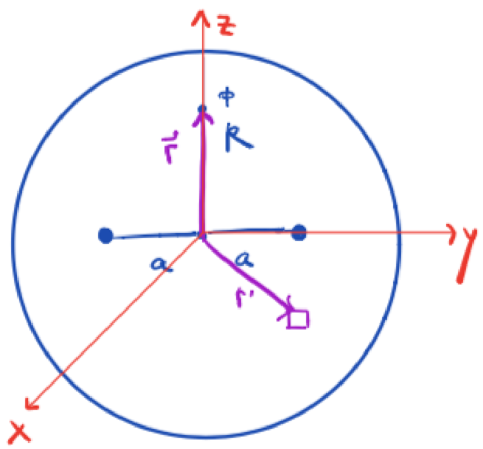
Handout der Übungsstunde vom 08.05.2019

Bibiana Prinoth
bprinoth@phys.ethz.ch
https://blogs.ethz.ch/funwithphysics/

Nachbesprechung Serie 8

Aufgabe 2

Wir betrachten eine gleichmässig geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung $-2e$. In ihr platzieren wir zwei positive Punktladungen mit jeweils Ladung e. Die zwei Ladungen sind symmetrisch um den Mittelpunkt gelegt. Wir wählen uns das Koordinatensystem wie folgt:



Wir gehen das Problem wie folgt an:

1. Berechnung des elektrischen Feldes
2. Abstossende Kraft der Ladungen
3. Kräfte-Gleichgewicht

1. Für die Berechnung des elektrischen Feldes benutzen wir:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \tag{1}$$

wobei $\vec{r}'$ die Position des Ladungselements, $\vec{r}$ die Position des Betachtungspunkts und dV' das infinitesimale Volumentelement der Ladung (Ladungselement bei nicht konkreter Ladung).

Die genaue Berechnung findet sich im Appendix A des Dokuments und stammt aus der Musterlösung.
Das elektrische Feld ergibt sich demnach zu:

$$\vec{E}(r) = -\frac{ea}{2\pi R^3 \varepsilon_0}\vec{e}_r \tag{2}$$

2. Die Abstossung der zwei Punktladungen ergibt sich aus der Coulomb-Kraft:

$$\vec{F}_{\text{Coulomb}} = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} \tag{3}$$

3. Wir berechnen nun das Kräftegleichgewicht wie folgt:

$$F_{\text{elektrisch}} + F_{\text{Coulomb}} = 0 \tag{4}$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{ea}{2\pi R^3 \varepsilon_0} \tag{5}$$

$$a = \frac{R}{2} \tag{6}$$

wobei a die Entfernung der Ladungen vom Mittelpunkt ist.

Aufgabe 3

Bei dieser Aufgabe hat sich ein Gleichungssystem ergeben, das die meisten auch lösen konnten. Hier kurz die ursprünglichen Gleichungen:

$$P_{\text{max}} = \frac{U^2}{R_{\text{min}}} \tag{7}$$

$$P_{\text{min}} = \frac{U^2}{R_{\text{max}}} \tag{8}$$

Mit $R_{\text{max}} = R_1 + R_2$ und $R_{\text{min}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ bekommt man dann ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen. Die Lösung ist demnach eindeutig.

Aufgabe 5

Die Aufgabe wurde nicht während der Stunde besprochen. Wichtig ist anzumerken, dass bei der Aufgabenstellung die Beschreibung "stationär" fehlt. Dies hatte ich euch auf den Tipps gegeben. Im stationären Zustand gilt demnach:

$$F_R + F_e = 0 \tag{9}$$

Daraus bekommt man die folgende Gleichung für die Driftgeschwindigkeit:

$$v^{\pm} = \frac{q^{\pm} V}{6\pi\eta r_{\text{eff}}^{\pm} d} = \pm 28.3 \ \mu m/s \tag{10}$$

Für den zweiten Teil der Aufgabe konntet ihr den Tipp benutzen, dass

$$j = \sum_i n^i q^i v^i \tag{11}$$

wobei i entweder $+$ oder $-$ ist.
Damit ergibt sich für den Strom:

$$I = jA = \left(\frac{(q^+)^2 n^+}{r_{\text{eff}}^+} + \frac{(q^-)^2 n^-}{r_{\text{eff}}^-} \right) \frac{VA}{6\pi\eta d} \tag{12}$$

Mit $R = \frac{V}{I}$ ergibt sich dann $R = 2.2 \cdot 10^4 \ \Omega$

Theorie: Widerstände

Kurz zur Erinnerung findet ihr hier die Theorie zu Widerständen.

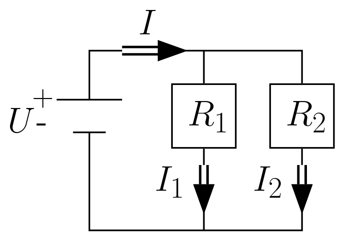
Ohm'sches Gesetz

$$U = RI \tag{13}$$

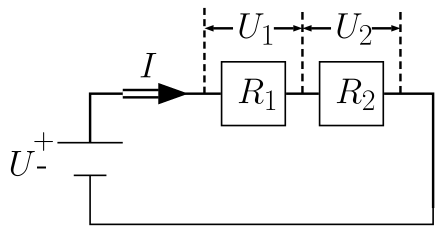
Leistung

$$P = UI \tag{14}$$

Parallel	**Seriell**
$I = I_1 + I_2$ (15) Aus dem Ohm'schen Gesetz folgt dann: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (16)	$U = U_1 + U_2$ (17) Aus dem Ohm'schen Gesetz folgt dann: $R = R_1 + R_2$ (18)

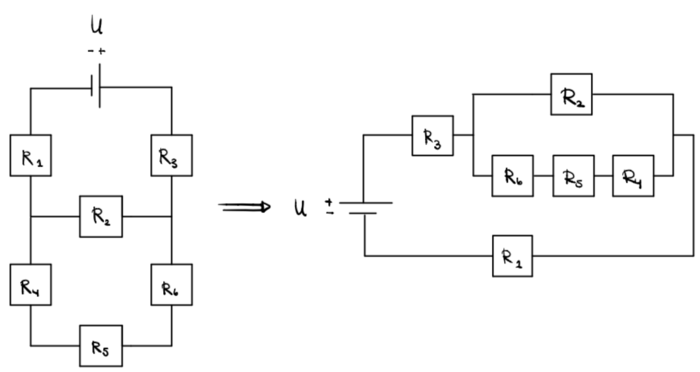


Parallelschaltung



Serieschaltung

Oftmals ist nicht sofort ersichtlich, was für eine Schaltung wir vorliegen haben. Daher ist es dann gut, das ganze etwas übersichtlicher aufzuzeichnen. Hier ein Beispiel dazu. Im rechten Bild ist klar ersichtlich, welche Widerstände, wie geschalten sind.



A Berechnung des elektrischen Feldes aus Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}-\vec{r}'| &= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r' \sin\vartheta' \cos\varphi' \\ r' \sin\vartheta' \sin\varphi' \\ r' \cos\vartheta' \end{pmatrix} \right| && (2) \\
&= \sqrt{(r'\sin\vartheta'\cos\varphi')^2 + (r'\sin\vartheta'\sin\varphi')^2 + (r - r'\cos\vartheta')^2} && (3) \\
&= \sqrt{(r'\sin\vartheta')^2 + r^2 - 2rr'\cos\vartheta' + (r'\cos\vartheta')^2} && (4) \\
&= \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\vartheta'} && (5)
\end{aligned}
$$

Für die Ladungsdichte gilt: $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$ wobei ρ_0 konstant ist und es gilt: $\rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

Nun kann das Integral gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' && (6) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\infty} dr' r'^2 \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} && (7) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{R} dr' r'^2 \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \frac{\rho_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|} && (8) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{R} dr' r'^2 \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \frac{\rho_0}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\vartheta'}} && (9) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{R} dr' r'^2 \frac{\rho_0}{rr'} \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\vartheta'} \Big|_0^{\pi} && (10) \\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{R} dr' r' \left(\sqrt{r'^2 + r^2 + 2rr'} - \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'} \right) && (11) \\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{R} dr' r' \left((r + r') - |r - r'| \right) && (12) \\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{R} dr' r' \begin{cases} 2r' & r \geq r' \\ 2r & r < r' \end{cases} && (13)
\end{aligned}
$$

Diese Fallunterscheidung ist notwending, um den Betrag korrekt zu behandeln. Im folgenden Betrachten wir nur den Fall, dass $r < R$ ist (innerhalb der Ladungsverteilung).

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r}\int_0^{2\pi} d\varphi' \left(\int_0^r 2r'^2 dr' + \int_r^R 2rr'dr'\right) && (14)\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r}\int_0^{2\pi} d\varphi' \left(\frac{2r^3}{3} + (rR^2 - r^3)\right) && (15)\\
&= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 r} 2\pi \left(\frac{-r^3}{3} + rR^2\right) && (16)\\
&= \frac{3Q}{4\pi R^3}\frac{1}{2\epsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) && (17)
\end{aligned}$$

Im Skript wird der Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und Potential in Integralschreibweise beschrieben mit:

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{-\infty}^{r} \vec{E}(\vec{r}')d\vec{r}' \qquad (18)$$

In unserem Fall (auf Grund der Kugelsymmetrie der Ladungsverteilung gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \varphi(r) && (19)\\
E(\vec{r}) &= E(r) && (20)
\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\varphi(r) = -\int_{-\infty}^{r} \vec{E}(r')dr' \Leftrightarrow -\frac{d\varphi}{dr} = E \qquad (21)$$

Für das E-Feld innerhalb einer homogen geladenen Kugel mit Ladung $Q = -2e$ am Punkt $r = a$ gilt somit:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(r) &= -\frac{d\varphi}{dr}\vec{e}_r && (22)\\
&= -\frac{d}{dr}\frac{3Q}{4\pi R^3}\frac{1}{2\epsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)\vec{e}_r && (23)\\
&= \frac{-2e}{4\pi R^3}\frac{1}{2\epsilon_0}2a && (24)\\
&= -\frac{ea}{2\pi R^3\epsilon_0} && (25)
\end{aligned}$$