Handout der Übungsstunde vom 03.05..2019

Bibiana Prinoth
bprinoth@phys.ethz.ch
https://blogs.ethz.ch/funwithphysics/

Zumal ihr in der Vorlesung den Gauss'schen Satz nicht behandelt habt und auch nicht behandeln werdet, müsst ihr eure elektrischen Felder auf eine andere, direkte Weise berechnen. Im Rahmen dieser Übungsstunde und somit dieses Handouts betrachten wir die explizite Berechunung zweier elektrischer Felder mit unendlich ausgedehnter Ladungsträger. Für endliche Ladungsträger könnt ihr weiterhin die Methode der direkten Bestimmung [1] verwenden.

Das Rezept zur Berechnung

Wie auch für den direkten Weg gibt es hier ein Rezept, welches man step-by-step durchgehen kann, um das elektrische Feld zu berechnen. Das Rezept wird im folgenden aufgeschrieben und unten anhand von zwei Beispielen angewandt.

1. Zeichne deine Anordnung in eine Skizze. Wähle dazu ein geeeignetes Koordinatensystem (2-dim, 3-dim).

2. Betrachte die **Symmetrien** deiner Skizze. Wähle deinen Betrachtungspunkt P so, dass sein Ortsvektor $\vec{r}$ möglichst einfach ist und alle Symmetrien dabei ausgenutzt werden. Typische Symmetrien sind die Rotationsinvarianz (unabhängig von φ) und die Translationsinvarianz (unabhängig von x, y oder z).

3. Bestimme nun den Ortsvektor $\vec{r}$ deines Betrachtungspunkts. Er sollte wie gesagt möglichst einfach aussehen, dh. möglichst viele 0-Einträge enthalten.

4. Wähle nun ein infinitesimales Ladungselement dq auf deinem Ladungsträger. Beachte dabei, dass es sehr sinnvoll ist, wenn dessen Positionsvektor $\vec{r}'$ senkrecht auf $\vec{r}$ steht.

5. Benutze nun

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{1}$$

   und setze alle deine bestimmten Argumente (dq, $\vec{r}$ und $\vec{r}'$) ein.

6. Berechne nun das Integral mit geeigneten Grenzen

$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{2}$$

__Bemerkung:__ Es kann dabei sein, dass es sich um ein Oberflächenintegral handelt $\rightarrow$ zwei Integrale. Des Weiteren kann es sein, dass das E-Feld nur von einer Richtung abhängt, wodurch es nur notwendig wird, die Komponente zu berechnen, welche keine Symmetrie besitzt.

1 Zwei Beispiele

1.1 Der unendlich lange Draht

Abbildung 1 zeicht die Anordnung dieses Systems. Da das System sowohl Rotationssymmetrie als auch Translationssymmetrie in z-Richtung besitzt, wählen wir Zylinderkoordinaten, setzen dabei $\varphi = 0$ für den Betrachtungspunkt P (dh. auf die x-Achse) und benutzen $z = 0$ als z-Komponente. Dies ergibt uns dann, dass das elektrische Feld nur davon abhängt, wie weit entfernt unser Punkt vom Draht ist, dh. wie gross r ist. r ist dabei der Betrag des Vektors $\vec{r}$. Konkret ist also $E(r, \varphi, z) = E_r(r)\hat{r}$.

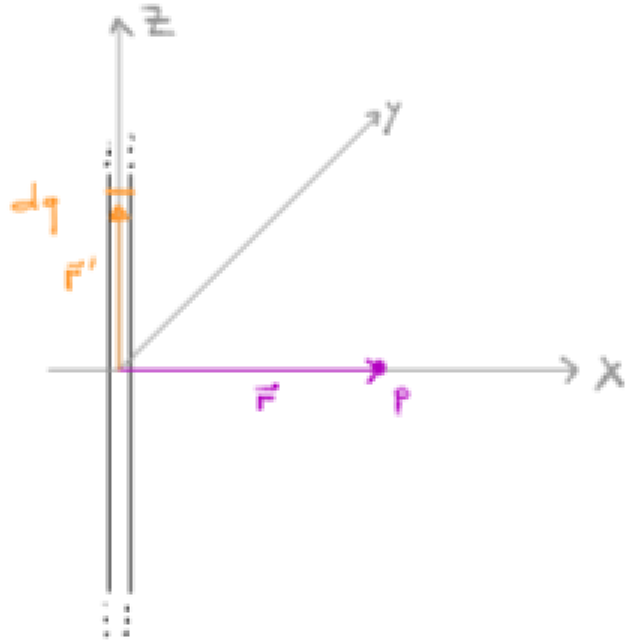

Abbildung 1: Anordnung eines unendlich langen Drahts als Ladungsträger

Folgende Argumente haben wir nun gewählt:

- Infinitesimales Ladungselement dq mit $dq = \lambda dz'$
- Ortsvektor des Ladungselements dq mit $\vec{r}' = (0, 0, z')^\mathsf{T}$
- Ortsvektor des Betrachtungspunkts P mit $\vec{r} = (x, 0, 0)^\mathsf{T}$

Durch diese Wahl vereinfacht sich die Rechnung für das elektrische Feld. Wir benötigen aufgrund der Symmetrien nur die r-Komponente, resp. x-Komponente. Es ergibt sich:

$$E_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2+z'^2} \frac{r}{\sqrt{r^2+z'^2}} \tag{4}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{(r^2+z'^2)^{3/2}} dz' \tag{5}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{6}$$

Somit haben wir das elektrische Feld bestimmt und es lautet:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} \tag{7}$$

1.2 Die unendlich ausgedehnte Ebene

Abbildung 2 zeigt die Anordnung dieses Systems. Das System hat Translationssymmetrie in x- und y-Richtung. Somit ist unser elektrisches Feld nur davon abhängig, wie weit der Betrachtungspunkt P in z-Richtung entfernt ist. Wir können hier also problemlos mit kartesischen Koordinaten rechnen. Der Einfachheit halber erkennen wir noch, dass wir den Koordinaten-Ursprung so wählen können, dass die Ebene bei $z = 0$ zu liegen kommt. Das elektrische Feld ist nun von der Form $E(x, y, z) = E_z(z)\hat{z}$.

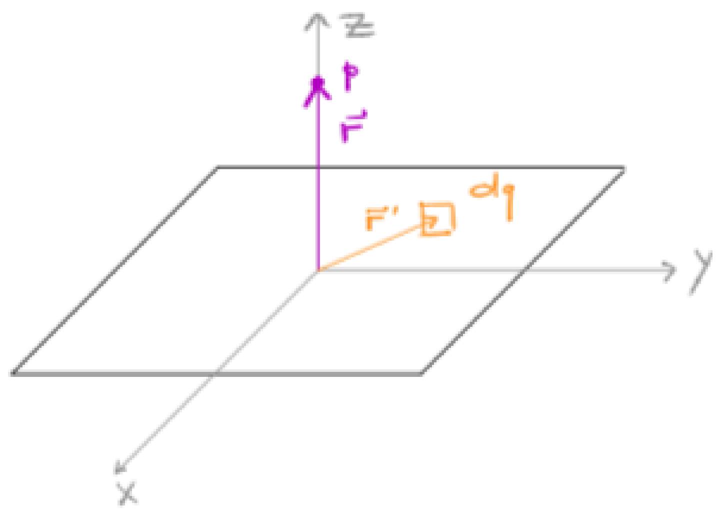

Abbildung 2: Anordnung einer unendlich ausgedehnten Ebene als Ladungsträger

Folgende Argumente haben wir nun gewählt:

- Infinitesimales Ladungselement dq mit $dq = \sigma dx' dy'$
- Ortsvektor des Ladungselements dq mit $\vec{r}' = (x', y', 0)^\intercal$
- Ortsvektor des Betrachtungspunkts P mit $\vec{r} = (0, 0, z)^\intercal$

Ebenfalls durch die geeignete Wahl des Koordinatensystems und der Betrachtung der Serien wird unsere Integralberechnung vereinfacht. Wir betrachten nur die z-Komponente. Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
E_z &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} && (8)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma dx' dy'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x'^2+y'^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{x'^2+y'^2+z^2}} && (9)\\
&= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dx' dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}} && (10)\\
&= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} && (11)
\end{aligned}
$$

2 Schlussbemerkung

Wir können leider den direkten Weg aus [1] nicht wählen, zumal dort das Integral am Schluss divergieren würde. Ihr könnt diesen Weg daher immer dann benutzen, wenn eure Integralgrenzen endlich sind. Im unendlichen Fall empfehle ich euch diese Variante hier, auch wenn sie etwas umständlich ist.

Literatur

[1] Berechnungsmethoden für elektrische Felder - eine Zusammenfassung
`https://blogs.ethz.ch/funwithphysics/files/2019/04/Berechnungsmethoden_E_Feld.pdf`