Handout der Übungsstunde vom 27. Februar 2020
Woche 2

Bibiana Prinoth
bibi@galactic-gossip.ch
http://galactic-gossip.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Nachbesprechung Serie 1

Aufgabe 2

a) Wir messen eine gewisse Zeitspanne Δt und zählen dabei die Wellenberge. Dadurch bekommen wir die Frequenz

$$f = \frac{N}{\Delta t} \tag{1}$$

Die Wellenlänge können wir direkt abmessen. Mit diesen zwei Grössen lässt sich nun die Phasengeschwindigkeit bestimmen:

$$v = \lambda f = \lambda \frac{N}{\Delta} \tag{2}$$

Für die zurück gelegte Distanz benutzen wir nun noch die Gleichung für eine gleichförmige Bewegung und erhalten:

$$x = vt = \lambda \frac{N}{\Delta} t \tag{3}$$

wobei t die Zeit zwischen Auftreffen des Steins im Wasser und der Ankunft des ersten Wellenberges ist.

b) Wir haben eine perfekte ebene Welle angenommen: Was heisst das genau? Alle Wellenberge kommen zur exakt gleichen Zeit an. Es kommen immer gleich viele Wellen pro Zeitintervall an, dh. die Frequenz ist konstant. Zudem nehmen wir auch noch an, dass die Amplitude der Wellen sich nicht verändert, was bei Kugelwellen aber der Fall wäre. Bei Kugelwellen nimmt die Amplitude mit der Distanz ab. Auch bleibt die Phasengeschwindigkeit nicht konstant, weil wir zB. Unebenheiten auf dem Boden haben. Weiters vernachlässigen wir die Reibung.

Aufgabe 3

Wir haben in der Aufgabe 3 bereits festgestellt, dass nur das Gewicht unterhalb des Betrachtungspunkts eine Spannung auf das Seil bewirkt. Diese Spannung ist gerade durch die Gewichtskraft gegeben und lautet:

$$F(x) = m(x)g = \frac{L-x}{L} Mg \tag{4}$$

Die Geschwindigkeit des Seils ergibt sich demnach zu:

$$v = \sqrt{\frac{F(x)}{\mu}} = \sqrt{\frac{(L-x)Mgl}{LM}} = \sqrt{(L-x)g}. \tag{5}$$

Nun spielen wir ein wenig mit dem Differential. Die Zeit, welche für die Propagation der Welle von oben nach unten benötigt wird, ist gerade gegeben durch:

$$t = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dx}{dx} dt = \int_0^L \frac{dx}{v(x)} = \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{(L-x)g}} = \Big[-\frac{2}{g}\sqrt{(L-x)g} \Big]_0^L = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \approx 2\mathrm{s} \tag{6}$$

Aufgaben 4 + 5

Betrachtet hierzu die handschriftlichen Notizen.

2 Theorieblock

2.1 Räumlich ausgedehnte Wellen

2.1.1 Ebene Wellen

Ebene Wellen beschreiben einen sehr interessanten Spezialfall von Wellen. Wir haben ihn bereits in der Aufgabe 2 der Serie 1 benutzt. Sie bringen die Eigenschaft mit sich, dass die Phase an jedem Ort senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gleich ist.*(Etwas intuitiver: Stellt euch vor, ihr geht zusammen mit euren Freunden surfen. Ihr reitet alle die gleiche Welle und kommt alle gleichzeitig am Ufer an. Es handelt sich dabei um die perfekte Welle ;).)*
Es gibt hier zwei Möglichkeiten, bei denen wir Wellen als ebene Wellen betrachten können:

1. Es handelt sich um eine sehr lange Quelle: $L >> \lambda$.
2. Es handelt sich um eine sehr weit entfernte Quelle, sodass die Welle schon sehr lange unterwegs ist und demnach "Zeit hatte, eben zu werden: $d << \lambda$.

Die Wellengleichung nimmt die Form

$$\boxed{\xi(x,y,z,t) = Af(kx - \omega t)} \tag{7}$$

an.

2.1.2 Polarisation

Die Amplitude einer transversalen Welle hat zwei Freiheitsgrade. Wir können sie also wie folgt als Vektor schreiben:

$$\vec{A} = ... \tag{8}$$

Die Wellengleichung wird nun jeweils so geschrieben:

$$\boxed{\vec{\xi}(t) = \vec{A}e^{i(kz-\omega t})} \tag{9}$$

Es gibt hierbei verschiedene mögliche Polarisationen (braucht ihr für die Serie):

- linear: Die Welle schwingt nur in einer Ebene.
- elliptisch: Dabei handelt es sich um eine Überlagerng von zwei linear polarisierten Wellen. Die Polarisation ist dabei aber nur elliptisch, sofern ein Phasenunterschied vorhanden ist. Gibt es diesen nicht, so handelt es wieder um eine linear polarisierte Welle.
- Zirkular polarisiert: Dabei handelt es sich um einen Spezialfall der elliptischen Welle. Dieser tritt bei einer Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \pi/2$ ein.

2.1.3 Ausbreitung in beliebige Richtung

Bisher haben wir von der Ausbreitung in eine Richtung gesprochen. Das geht aber selbstverständlich auch in drei Dimensionen! Die Wellenzahl wird also zum Wellenvektor und das x oder z im Sinusargument wird zu einem dreidimensionalen Vektor.

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{10}$$

Die Wellenfunktion nimmt die folgende Form an.

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t} \tag{11}$$

Die Wellengleichung kann ebenfalls in drei Dimensionen geschrieben werden:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\xi}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{\xi}(\vec{r}, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{\xi}(\vec{r}, t)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vec{\xi}(\vec{r}, t)}{\partial z^2} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\xi}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{\xi}(\vec{r}, t) = 0 \tag{13}$$

2.1.4 Kugelwellen

Kugelwellen werden durch punktförmige Quellen erzeugt. Wir haben die Wellengleichung bereits auf der Serie 1 gesehen und benutzt. Sie lautet

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\xi}(r, t)}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \vec{\xi}(r, t) \tag{14}$$

Die Wellengleichung wird durch folgende Wellenfunktion gelöst:

$$\boxed{\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{A}_1}{r} f_1(kr - \omega t) + \frac{\vec{A}_2}{r} f_2(kr + \omega t)} \tag{15}$$

Daran sieht man, dass die Amplitude der Kugelwelle mit dem Abstand r abnimmt.

2.1.5 Energietransport

Wellen transportieren Energie. Die zwei Energieformen bei mechanischen Wellen sind:

- kinetische Energie ($E = \frac{1}{2} m v^2$:
  Die kinetische Energiedichte ist demnach gegeben durch:

$$\boxed{\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right)^2} \tag{16}$$

- elastische Energie ($E = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$:

  Die elastische Energiedichte ist demnach gegeben durch:

$$\boxed{\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x} \right)^2} \tag{17}$$

Die Gesamtenergiedichte ist gegeben durch:

$$\boxed{\frac{dW}{dV} = \frac{dE_{el}}{dV} + \frac{dT}{dV} = \rho v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \tag{18}$$

2.1.6 Intensität

Wir betrachten die Gesamtenergiedichte einer harmonischen Welle ($\xi(x,t) = A\cos{(kx - \omega t)}$ mit Phasengeschwindigkeit $v = \omega/k$.

$$\frac{dW}{dV} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2{(kx - \omega t)} \tag{19}$$

Mitteln wir die Energiestromdichte nun über eine Periode, so erhalten wir:

$$\left\langle \frac{dW}{dV} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dV} dt = \frac{1}{2} \rho\omega^2 A^2 \tag{20}$$

Als nächste wichtige Grösse betrachten wir nun die **Energieflussdichte**. Dies ist genau diejenige Energie, welche pro Zeit durch durch ein zum Fluss orthogonales Flächenelement steht. Wir nennen die Energieflussdichte manchmal auch **Poynting-Vektor**.

$$\vec{S} = \frac{d^2W}{dadt} \cdot \frac{d\vec{a}}{|d\vec{a}|} \tag{21}$$

Der zweite Bruch dient dabei nur als Normierung. Wir definieren uns nun die **Intensität** als den Betrag dieses Vektors. Die **mittlere Intensität** ist also wieder die über eine Periode gemittelte Intensität und wird zu:

$$\boxed{\langle I \rangle = \frac{1}{2} \rho\omega^2 A^2 v} \tag{22}$$

2.2 Superpositionsprinzip

Das Superpositionsprinzip sagt aus, dass die Summe zweier Wellen wieder eine Welle ist. Für eine harmonische Welle mit gleicher Frequenz, Amplitude und Wellenzahl, aber einer Phasenverschiebung:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = A\sin{(kx_1 - \omega t)} + A\sin{(kx_2 - \omega t + \delta)} \tag{23}$$

$$= 2A\cos{(\frac{1}{2}(\delta + k\Delta x)}\sin{(kx_1 - \omega t + \frac{1}{2}(\delta + k\Delta x)} \tag{24}$$

Der Cosinus-Term beschreibt nun also die Amplitude der neuen, superponierten Welle. Der Sinus-Term beschreibt wieder eine harmonische Welle.
Wir betrachten zwei wichtige Phänomene:

- **konstruktive Interferenz:** Diese tritt ein, wenn die neue Phase ein ganzzahliges Vielfaches von π ist: $\frac{1}{2}(\delta + k\Delta x) = n\pi$

- **destruktive Interferenz:** Diese tritt ein, wenn die neue Phase ein halbzahliges Vielfaches von π ist: $\frac{1}{2}(\delta + k\Delta x) = (n + \frac{1}{2})\pi$

Wir nennen die Wellen **kohärent**, wenn die Phasendifferenz nicht von der Zeit abhängt.

Für zwei entgegengesetzt laufende Wellen der Form

$$\xi_1(t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{25}$$
$$\xi_2(t) = A\cos(-kx - \omega t + \delta_R). \tag{26}$$

Die Superposition dieser zwei Wellen ist dann:

$$\boxed{\xi(t) = 2A\cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right)} \tag{27}$$

2.3 Reflexion und Transmission

Trifft eine Welle auf eine Grenzfläche zweier Medien, so finden im allgemeinen Fall eine Reflexion und eine Transmission dieser Welle statt. Die dazugehörigen Wellenfunktionen sind:

- **einlaufende Welle:** $\xi_A(x,t) = Ae^{i(k_1 x - \omega t)}$
- **reflektierte Welle:** $\xi_R(x,t) = Re^{i(-k_1 x - \omega t + \delta_R)}$
- **transmittierte Welle:** $\xi_T(x,t) = Te^{i(k_2 x - \omega t + \delta_T)}$

Es gibt verschiedene Fälle, die man sich etwas genauer anschauen kann:

1. Im allgemeinen Fall können wir mithilfe der Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche die folgenden zwei Bedingungen aufstellen:

$$T\sin\delta_T = R\sin\delta_R \quad , \quad T\sin\delta_T(\alpha + 1) = 0 \tag{28}$$

   α ist dabei gegeben durch $\alpha = \frac{k_2}{k_1}$. Für die Amplituden der reflektierten und transmittierten Welle erhalten wir also die wichtigen Formeln:

$$\boxed{R = \pm\frac{1-\alpha}{1+\alpha}A \quad , \quad T = \frac{2A}{1+\alpha}} \tag{29}$$

2. $\alpha = 1$: Für diesen Fall wird $R = 0$ und $T = A$. Es kommt also zu einer vollständigen Transmission.

3. $\alpha > 1$: Damit unser $R > 0$ müssen wir das negative Vorzeichen wählen. Für $\alpha >> 1$ handelt es sich um ein hartes Medium, dh. das Seil ist festgemacht. Es kommt damit zu einer vollständigen Reflexion mit einem Phasensprung um π.

4. $\alpha < 1$: Um wiederum $R > 0$ zu bekommen, betrachten wir hier das positive Vorzeichen. Für den Grenzfall, dass $\alpha = 0$ handelt es sich um ein loses Seilende. Es kommt auch hier zu einer vollständigen Reflexion, aber ohne Phasensprung.

3 Tipps zur Serie 2

Aufgabe 1

a) Benutzt hier wieder die Definitionen für harmonische Wellen aus der letzten Übungsstunde. Mit Frequenz meinen sie hier ν.

b) Der allgemeinste Fall einer harmonischen Welle ist von der Form: $y(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \phi)$. Das $+$ habe ich bereits für euch gewählt, zumal es sich um eine in negative x-Richtung propagierende harmonische Welle handelt. Ihr könnt nun alle unbekannten Grössen aus den Anfangsbedingungen aus der Aufgabenstellung bestimmen.

c) Benutzt hier die Definition, dass die Geschwindigkeit die zeitliche Ableitung der Wellenfunktion ist. Wertet diese Ableitung dann in $x = 0$, $t = 0$ aus.

Aufgabe 2

a) Benutzt hier die Definitionen zur Polarisation. Hier müsst ihr vor allem qualitativ (dh. als Text) antworten.

b) Hier hat sich in der Aufgabenstellung noch ein Fehler eingeschlichen. Die θ-Abhängigkeit soll dort nicht sein!

$$\vec{f}(z,t) = \begin{pmatrix} A\cos(kz - \omega t) \\ A\sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Betrachtet nun also die Polarkoordinaten und berechnet $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) + d) Viel Spass!

Aufgabe 3

a) Hier benötigen wir eine etwas andere Definition für **konstruktive** und **destruktive** Interferenz. Wellen interferieren konstruktiv, wenn der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. Sie interferieren destruktiv, wenn der Gangunterschied ein halbzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist.

- **konstruktiv:**
$$\Delta x = r_2 - r_1 = n \tag{31}$$

- **destruktiv:**
$$\Delta x = (n + \frac{1}{2})\lambda \tag{32}$$

b) Eine Frage als Denkanstoss: Was passiert an den Wänden?

c) Berechnet die Laufzeit / den Phasenunterschied. Ansonsten dürft ihr hier selbst rumprobieren.

Aufgabe 4

Wir gehen hier wieder von einer perfekten Welle aus. Die Wellen sind in Phase, harmonisch, haben die gleiche Kreisfrequenz ω. Einzig die Leistung soll unterschiedlich sein. Des Weiteren betrachten wir nur eine zweidimensionale Welle.

a) Wir möchten hier gerne zuerst die Wellenfunktionen für die emittierten Wellen aufstellen. Dazu wissen wir, dass sie einen harmonischen Term haben. Die Amplitude müssen wir aber jeweils noch bestimmen. Um dies zu tun, betrachtet die Intensität. Die Intensität ist im Grunde die Leistung, welche über eine konstante Kurve mit Radius r (im Falle der Kreiswellen wie hier), resp. über eine konstante Sphäre mit Radius r bei Kugelwellen abgegeben wird. Die konstante Kurve ist hier also ein Kreis. Was ist die "Oberfläche" einer Kurve? Zur Erinnerung: $\langle I \rangle \propto A^2$.

b) Hier betrachten wir nun die Überlagerung der zwei Wellen im Punkt M. Was sind jeweils die Distanzen, die zurückgelegt wurden? Findet heraus, was für das Argument des Sinus (oder Cosinus) in eurer harmonischen Welle gelten muss, damit die Wellen destruktiv interferieren.

c) Hier benutzen wir eigentlich schon das Konzept der stehenden Wellen. Für diese Aufgabe müsst ihr euch überlegen, wo der Knoten sich befinden wird ($A_1 = A_2$, warum?). Benutzt dann die Formeln. Was gilt für das Leistungsverhältnis P_1/P_2?

d) Findet hier eine Bedingung für die Amplituden und bestimmt dann die Geschwindigkeit durch ableiten.

Aufgabe 5

a) Benutzt hier die Definitionen aus dem Theorieblock.

b) Wir verlangen Stetigkeit der Wellenfunktion und ihrer Ableitung bei der Grenzfläche $x = 0$. Wie sieht so etwas mathematisch aus. Daraus könnt ihr euch Bedingungen für die Amplituden in Abhängigkeit der Wellenzahlen aufstellen. Um dann die Wellenzahlen zu bestimmen benutzt ihr:

$$v_{a,b} = \sqrt{\frac{F}{\text{Querschnittsfläche} \cdot \rho}}$$

und den Zusammenhang $v = k\omega$. Damit könnt ihr euch die Amplituden in Abhängigkeit der Seilradien bestimmen.

c) Denkt hier an den Phasensprung!

d) Berechnet hier wieder die mittlere Intensität. Die mittlere Intensität gibt euch die Energie pro Zeit und Fläche an. Damit bekommt ihr eine Gleichung für die Energie. Durch berechnen der mittleren Intensität erhaltet ihr also eine Gleichung für Energien. Dann macht ihr Energieerhaltung und schaut, ob ihr das mit euren Resultaten auch so hinkriegt.

Viel Erfolg beim Lösen der Serie 2! Meldet euch gerne mit Fragen und vergesst bitte nicht denn Doodle [1] auszufüllen.

[1] `https://ethz.doodle.com/poll/fvrpdmf46swbhxap`