Handout der Übungsstunde vom 12. März 2020
Woche 4

Bibiana Prinoth
bibi@galactic-gossip.ch
http://galactic-gossip.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrostatik - ein paar wichtige Definitionen

Elektrischer Strom:

Die Stromstärke gibt an, wie viele Ladungen pro Sekunde durch ein Objekt fliessen. Ist die Stromstärke I konstant in einem Zeitintervall Δt, so gilt für die geflossene Ladung ΔQ:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Delta Q}{\Delta t} \\ \Delta Q &= I\,\Delta t \end{aligned} \tag{1}$$

Coulombkraft

Befindet sich die Ladung Q_0 an der Stelle $\vec{r}_0$ und die Ladung Q_1 an der Stelle $\vec{r}_1$, so übt die Ladung Q_1 auf die Ladung Q_0 die folgende Kraft aus:

$$\vec{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0 Q_1}{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)^2} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|} \tag{2}$$

Elektrisches Feld

Das elektrische Feld einer diskreten Ladungsverteilung ist gegeben durch:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{(\vec{r} - \vec{r}_i)^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{3}$$

Das elektrische Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung ist gegeben durch:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{(\vec{r} - \vec{r'})^2} \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, dV' \tag{4}$$

Elektrisches Potential

Das elektrische Potential einer diskreten Ladungsverteilung ist gegeben durch:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{5}$$

Das elektrische Potential einer kontinuierlichen Ladungsverteilung ist gegeben durch:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}\, dV' \tag{6}$$

2 Berechnungsmethoden für elektrische Felder

2.1 Der direkte Weg über das Potential

Auf dem direkten Weg lassen sich elektrische Felder durch das elektrische Potential berechnen. Es gilt dabei der folgende Zusammenhang:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \tag{7}$$

Das elektrische Potential ist dabei gegeben durch:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dq \tag{8}$$

oder:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV' \tag{9}$$

wobei $\vec{r'}$ die Position des Ladungselements, $\vec{r}$ die Position des Betachtungspunkts und dV' das infinitesimale Volumentelement der Ladung (Ladungselement bei nicht konkreter Ladung).

Rezept

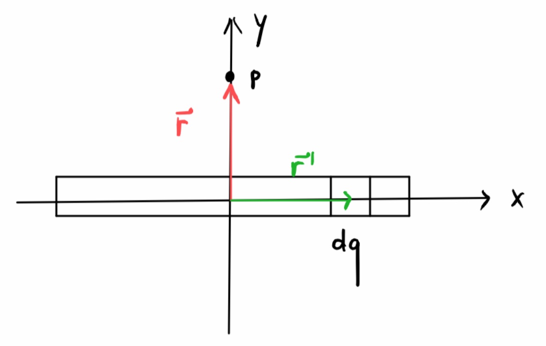
1. Ladungselement dq aufschreiben (zB: $dq = \lambda dx$ für eine Linienladung)
2. Position des Betrachtungspunkts ($\vec{r}$) und des Ladungselements ($\vec{r'}$) aufschreiben
3. $|\vec{r}-\vec{r'}|$ bestimmen
4. Alle oben bestimmten Grössen in die Gleichung für das Potential einsetzen

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dq \tag{10}$$

5. Integration mit geeigneten Grenzen (zB: Stabanfang bis Stabende)
6. Benutze Formel (1), um das elektrische Feld zu bestimmen.

2.1.1 Ein Beispiel: Linienladung

Wir betrachten eine Linienladung wie in der Abbildung gezeigt. Die Ladung soll die Länge l haben. Wir legen sie in symmetrisch um den Ursprung und betrachten nur zwei Dimensionen.



Das Ladungselement ist gegeben durch:

$$dq = \lambda dx \tag{11}$$

Nun beschreiben wir die Position des Betrachtungspunkts $\vec{r}$ und des Ladungselements $\vec{r}'$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{14}$$

Das Potential wird dann berechnet durch:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+y^2}} &(15) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \Big[\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + x \Big]_{-l/2}^{l/2} &(16) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{(l/2)^2+y^2} + l/2}{\sqrt{(l/2)^2+y^2} - l/2} \right) &(17) \end{aligned}$$

Als letztes benutzen wir noch $\vec{E} = -\nabla\phi$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 &(18) \\ E_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\Phi = -\frac{l}{y\sqrt{(l/2)^2+y^2}} &(19) \end{aligned}$$

Damit haben wir das elektrische Feld im Punkt P bestimmt.

2.2 Der direkte Weg über das elektrische Feld

Wie auch für den direkten Weg gibt es hier ein Rezept, welches man step-by-step durchgehen kann, um das elektrische Feld zu berechnen. Das Rezept wird im folgenden aufgeschrieben und unten anhand von zwei Beispielen angewandt.

1. Zeichne deine Anordnung in eine Skizze. Wähle dazu ein geeeignetes Koordinatensystem (2-dim, 3-dim). Betrachte die **Symmetrien** deiner Skizze.

2. Bestimme nun den Ortsvektor $\vec{r}$ deines Betrachtungspunkts.

3. Wähle nun ein infinitesimales Ladungselement dq auf deinem Ladungsträger. Beachte dabei, dass es sehr sinnvoll ist, wenn dessen Positionsvektor $\vec{r}'$ senkrecht auf $\vec{r}$ steht.

4. Benutze nun

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{20}$$

   und setze alle deine bestimmten Argumente (dq, $\vec{r}$ und $\vec{r}'$) ein.

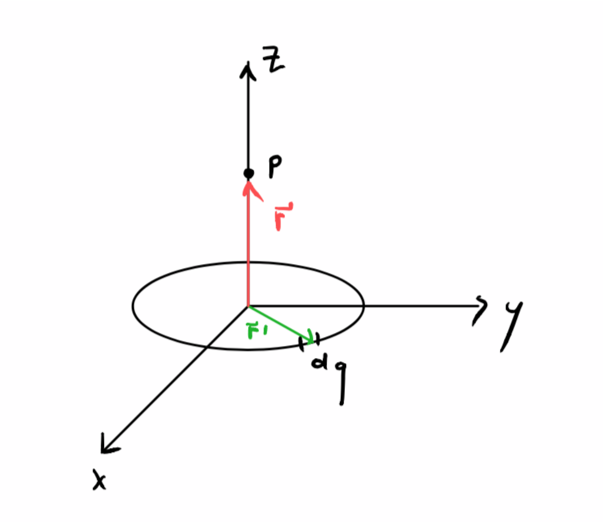
5. Berechne nun das Integral mit geeigneten Grenzen

$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{21}$$

Bemerkung: *Es kann dabei sein, dass es sich um ein Oberflächenintegral handelt $\rightarrow$ zwei Integrale. Des Weiteren kann es sein, dass das E-Feld nur von einer Richtung abhängt, wodurch es nur notwendig wird, die Komponente zu berechnen, welche keine Symmetrie besitzt.*

2.2.1 Ein Beispiel: Ringladung

Wir betrachten eine Ringladung im drei-dimensionalen Raum wie in der Abbildung gezeigt.



Das Ringladungselement ist gegeben durch

$$dq = \lambda dl = \lambda r' d\varphi \tag{22}$$

Nun betrachten wir die Ortsvektoren des Ladungselements $\vec{r}'$ und des Betrachtungspunkts P, genannt $\vec{r}$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} r' \cos\varphi \\ r' \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(r')^2 + z^2} \tag{25}$$

Setzen wir dies nun alles ein, so erhalten wir:

$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{26}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda r'}{((r')^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -r' \cos\varphi \\ -r' \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} d\varphi \tag{27}$$

Die Integration der x- und y- Komponenten ergibt jeweils 0, da wir über eine ganze Cosinus resp. Sinus-Periode integrieren. Für die z-Komponente erhalten wir

$$E_z = \frac{\lambda r' z}{2\varepsilon_0((r')^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{28}$$

2.3 Gauss

Als Alternative zum direkten Weg kann man oftmals Symmetrien ausnutzen. Es gilt für den Fluss (Integration über die Oberfläche):

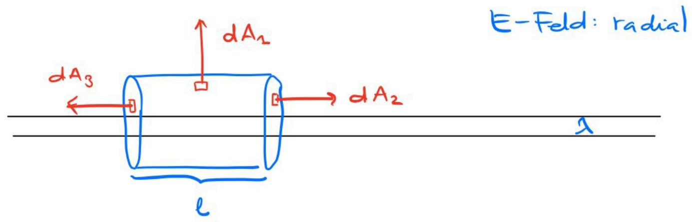
$$\Phi_E = \int_A \vec{E} d\vec{A} \tag{29}$$

Damit lautet das Gauss'sche Gesetz:

$$\int_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV \tag{30}$$

Wir benutzen dieses Verfahren, wenn folgende Fälle auftreten: Zylindrische oder sphärische Symmetrie, ∞-Ebenen

2.3.1 ∞-langer Draht (kennt ihr aus der Vorlesung)



Die Gauss'sche Fläche um einen unendlich langen Draht ist ein Zylinder. Das elektrische Feld wird vom Draht weg zeigen, sodass die Beiträge der Mantelfläche gleich Null werden, da sie senkrecht zum elektrischen Feld stehen. Mit Gleichung (4) gilt:

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} d\vec{A} = \int_A \vec{E}_1 d\vec{A}_1 = 2\pi r l E \tag{31}$$

wobei wir einfach über die Oberfläche des Mantels integriert haben. Die eingeschlossene Ladung im Zylinder ist:

$$Q_{\text{innen}} = \lambda l \tag{32}$$

Mit dem Gauss'schen Gesetz folgt dann:

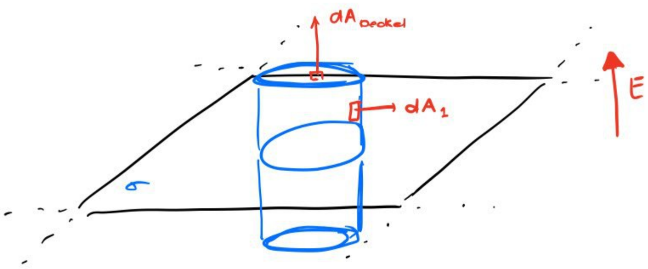
$$E \cdot 2\pi l r = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \tag{33}$$

Damit ergibt sich das elektrische Feld zu:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{34}$$

Wichtig: Unabhängig von der Länge des gewählten Zylinders!

2.3.2 ∞-Ebene (haben wir in der Stunde gerechnet)



Für die unendlich ausgedehnte Ebene wählen wir ebenfalls einen Zylinder als Gauss'sche Fläche. Mit Gleichung (4) gilt:

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} d\vec{A} = \int_{\text{Deckel}} \vec{E} d\vec{A} = 2\pi E r^2 \tag{35}$$

Zusammen mit der eingeschlossenen Ladung

$$Q_{\text{innen}} = \sigma \pi r^2 \tag{36}$$

und dem Gauss'schen Gesetz bekommen wir:

$$E \cdot 2\pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0} \tag{37}$$

Das elektrische Feld ergibt sich dann zu:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{38}$$

Bemerkung: Für das Feld zwischen zwei geladenen Platten mit jeweils entgegen gesetztem elektrischen Feld aus (13) folgt für das Feld zwischen ihnen dann: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Ausserhalb wird es gerade aufgehoben.