Handout der Übungsstunde vom 9. April 2020
Woche 8

Bibiana Prinoth
bibi@galactic-gossip.ch
http://galactic-gossip.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Relativistischer Dopplereffekt

Für Licht und andere elektromagnetische Wellen im Vakuum macht es keinen Unterschied, ob sich die Quelle und der Beobachter relativ zueinander bewegen oder nicht. Der klassische Dopplereffekt ist hier nicht mehr anwendbar.
Der (longitudinale) relativistische Dopplereffekt ist gegeben durch

$$\nu^A = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\nu^B \quad \text{für kleiner werdenden Abstand} \tag{1}$$

$$\nu^A = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu^B \quad \text{für grösser werdenden Abstand} \tag{2}$$

Der transversale Dopplereffekt ist gegeben durch $\nu^A = \sqrt{1-\beta^2}\,\nu^B$.

1.1 Beispiel zum Verständnis: War die Ampel rot oder grün?

Sie verbringen einen Tag damit, zwei Streifenpolizisten auf Ihrem Rundgang zu begleiten, und werden Zeuge, wie ein Autofahrer herausgewunken wird, der bei Rot über eine Ampel gefahren ist. Der Fahrer behauptet nun, das rote Licht habe grün ausgesehen, weil es dadurch, dass sich das Auto auf die Ampel zu bewegte, zu einer Verschiebung der Wellenlänge des beobachteten Signals kam. Sie führen schnell einige Rechnungen durch, um zu sehen, ob der Fahrer womöglich im Recht sein könnte oder ob es sich nur um eine faule Ausrede handelt.

2 Der relativistische Impuls und die relativistische Energie

Impuls

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \tag{3}$$

Energie

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_0 = \gamma m c^2 \tag{4}$$

wobei E_{kin} die kinetische Energie des Teilchens und E_0 die Ruheenergie ist.
Für Energie und Impuls ergibt sich ein wichtiger Zusammenhang.

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \tag{5}$$

2.1 Beispiel: Gesamtenergie, kinetische Energie und Impuls

Betrachten wie ein Elektron (Ruheenergie: 0.511 MeV), das sich mit einer Geschwindigkeit $\beta = 0.8$ bewegt. Wie gross sind a) seine Gesamtgeschwindigkeit, b) seine kinetische Energie und c) sein Impuls?

3 Energie- + Impulserhaltung: Der völlig inelastische Stoss

Ein Teilchen mit der Masse 2.00 MeV/c^2 und der kinetischen Energie 3.00 MeV kollidiert mit einem ruhenden Teilchen der Masse 4.00 MeV/c^2. Nach dem Stoss bleiben die beiden Teilchen miteinander verbunden. Berechnen Sie a) den Gesamtimpuls des Systems vor dem Stoss, b) die Geschwindigkeit des Zweiteilchensystems nach dem Stoss und c) die Masse des Zweiteilchensystems.

4 Vierer-Impuls

Wie auch schon für den Zeit-Ort-Vektor gibt es den Energie-Impuls-Vektor in 4er-Koordinaten.

$$P^\nu = \begin{pmatrix} E_{\text{tot}}/c \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\text{tot}}/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Zu Vierer-Vektoren: Ich verzichte hier auf die Tensor-Einführung für Vierer-Kooridinaten, weil ihr das im Endeffekt erst für die Elektrodynamik im 4. Semester benötigt. Wichtig ist aber, dass ihr das Vierer-Skalarprodukt berechnen könnt.

Für einen Vierer-Vektor gilt allgemein:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Griechische Indices (hier: μ) wird für 4er-Vektoren benutzt. Lateinische Indices (i, j, k oder x, y, z) werden für klassische Vektoren benutzt. Für das 4er-Skalarprodukt gilt

$$x^\mu y_\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^0 \\ -y^1 \\ -y^2 \\ -y^3 \end{pmatrix} = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \tag{9}$$

5 Invarianz des Raumzeit-Invervalls

Der *Abstand* für einen Zeit-Ort-Vektor ist gegeben durch

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta r^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{10}$$

- **Zeitartig:** $\Delta s^2 > 0$

  Das Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen in dem Inertialsystem am kleinsten, in dem die Ereignisse am selben Ort stattfinden.

- **Raumartig:** $\Delta s^2 < 0$

  Die Länge ist in dem Inertialsystem am kleinsten, in dem die Raumkoordinaten zur selben Zeit gemessen werden.

- **Lichtkegel:** $\Delta s^2 = 0$

  Die Gleichung beschreibt die Ausbreitung des Lichts als Kugelwelle.

6 Beispiel: Kosmische Strahlung (alte Prüfungsaufgabe)

Betrachten Sie den Prozess, in dem ein extrem hochenergetisches Proton (p) ein Photon (γ) absorbiert und daraus ein schwereres Teilchen (Δ) entsteht. Symbolisch:

$$p + \gamma \to \Delta \tag{11}$$

Seien Σ das Bezugssystem der Erde und Σ' das Bezugssystem, in dem das Δ-Teilchen in Ruhe ist. Die Masse vom Proton ist m_p und die Masse des Δ-Teilchens ist m_Δ; das Photon ist masselos. Betrachten Sie diesen Prozess als eine eindimensionale Kollision, in welcher das Proton und das Photon anfänglich gegeneinander laufen und das Δ-Teilchen danach in die urspüngliche Richtung des Protons weiterläuft.

1. Geben Sie die Viererimpulse von Proton, Photon und Δ-Teilchen im Bezugssystem Σ' an. Berechnen Sie daraus die Energie E'_p, gemessen im Bezugssystem Σ', die das Proton haben muss so, dass der Prozess $p + \gamma \to \Delta$ stattfinden kann. Geben Sie das Resultat als Funktion der Massen m_p und m_Δ an.

   Hinweis: Benutzen Sie die Energie-Impuls-Erhaltung. Es kann ausserdem vorteilhaft sein, das Vierer-Betragsquadrat der Viererimpulse zu bilden.

2. Berechnen Sie die Energie des Photons E'_γ, gemessen im Bezugssystem Σ', die zur Protonenergie E'_p aus Teilaufgabe a) passt. Geben Sie das Resultat als Funktion der Massen m_p und m_Δ an.

3. Sei E'_γ die Energie des Photons im Bezugssystem Σ; im Bezugssystem Σ' hat es die oben berechnete Energie E'_γ. Berechnen Sie die Relativgeschwindigkeit zwischen den Bezugssystemen Σ und Σ', d.h. die Geschwindigkeit des Δ-Teilchens im Bezugssystem Σ.

   Hinweis: Betrachten Sie dabei den relativistischen Dopplereffekt, unter Beachtung der Tatsache dass die Energie E und die Frequenz eines Photons durch $E = h\nu$ verknüpft sind, wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum ist.